عرفنا الدالة المميزة لمجموعة A (حيث $A\subset E$) بالشكل:

$$I_A : E \to R$$

$$x \to I_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in A \\ 1 & ; x \notin A \end{cases}$$

اثبتنا ان الدالة المميزة I_A تكون قيوسة اذا وفقط اذا كانت المجموعة A مقيوسة

تعريف الدالة البسيطة:

نقول عن الدالة $f : E \to R$ انها بسيطة

اذا تحقق ما يلي:

(1) مجموعة قيم الدالة f منتهية ولتكن $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

(2) توجد تجزئة للمجموعة E ولتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$

بحيث يكون $f(x) = a_i \; ; x \in A_i \; ; i = 1, 2, \dots, n$

ملاحظة:

- يمكن كتابة الدالة البسيطة بالشكل

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x) \; ; x \in E$$

نقول ان الدالة البسيطة

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$$

سالبة اذا كان $a_i \geq 0$ من اجل $i = 1, 2, \dots, n$

نلاحظ ايضاً:

ان الدالة البسيطة تكون قيوسة اذا وفقط اذا كانت المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ قيوسة.

* خواص: العمليات الجبرية على الدوال القيوسة.

مبرهنة:

لتكن $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ دوال بسيطة معرفة على مجموعة E عندئذٍ

(1) الدالة $c\varphi(x)$ بسيطة من اجل كل ثابت c

(2) الدوال $\varphi(x) \mp \psi(x)$ و $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ دوال بسيطة

مبرهنة ٢:

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال المقيسة على المجموعة E ومتقاربة نقطياً من دالة $f(x)$ (محدودة أم غير محدودة) عندئذٍ تكون الدالة $f(x)$ مقيسة على E

هنا سابقاً الدالة $f(x)$ مقيسة على E

$$f_n : E \longrightarrow \overline{R}$$

وكذلك $f : E \longrightarrow \overline{R}$

مبرهنة ٣:

لتكن $f : E \longrightarrow \overline{R}$ دالة مقيسة غير سالبة على E عندئذٍ توجد متتالية $\{\varphi_n(x)\}$ من الدوال البسيطة وغير السالبة ومتقاربة نقطياً من الدالة $f(x)$

وإذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة فيكون التقارب منتظماً.

ملاحظة:

في المبرهنة (٣) يمكن تشكيل المتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ بالشكل التالي:

نضع:

$$E_n^k = E\left(\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right) ; k = 0, 1, 2, \dots, n2^n - 1$$

$$= E\left(f \geq \frac{k}{2^n}\right) \cap E\left(f < \frac{k+1}{n}\right)$$

$$E_n = E(f > n)$$

وتشكل المتتالية $\varphi_n(x)$ التي حدودها

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} I_{E_n^k}(x) + n I_{E_n}(x)$$

حيث $n = 1, 2$

ملاحظة: إذا كانت $f(x)$ دالة مقيسة (ليست بالضرورة أن تكون غير سالبة) فيمكن تجزئة الدالة $f(x)$ إلى جزئين

الجزء الموجب : $f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$

والجزء السالب : $f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$

وكلاً من $f^+(x)$ ، $f^-(x)$ دالة قيوسة وغير سالبة.
لذلك توجد متتاليتين من الدوال البسيطة وغير السالبة $f^+(x)$ $f^-(x)$
وبما أنه

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad ; x \in E$$

فتكون المتتالية $\{\varphi_n^+(x), \varphi_n^-(x)\}$ تتقاربان للدالة $f(x)$
والذي يعني أنه كل دالة قيوسة تكون نهاية لمتتالية من الدوال البسيطة.

* تكامل ليبيغ

هناك العديد من الدوال ذات القيم الحقيقية غير القابلة للتكامل حسب ريمان و أشهر مثال على ذلك دالة ديركليه

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$$

حيث

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \cap Q \\ 0 & ; x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$$

لأنها غير مستمرة في أي مكان.

• لذا اقتضت الضرورة توسيع مفهوم التكامل ليشمل الدوال المحدودة حسب ريمان ودوال أخرى غيرها (دالة ديركليه مثلاً) ونبدأ بتكامل الدوال البسيطة.

تكامل لبيبيغ للدوال البسيطة:

لتكن $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$ معرفة على مجموعة X

حيث ان المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ تشكل تجزئة للمجموعة X

علما بأن:

$\varphi(x) = a_i \; ; \; x \in A_i \; ; \; i = 1, 2, \dots n$

$\Leftrightarrow E(\varphi = a_i)$

ولنفرض ان $\varphi(x) = 0$ خارج مجموعة A (جزئية من X) قياسها محدود اي ان:

$\varphi(x) = 0 \; ; \; \forall x \in A^c \quad , \quad \mu(A) < \infty$

تعريف:

لتكن $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$ دالة بسيطة معرفة على المجموعة X وتحقق ما ذكرناه آنفاً

عندئذٍ نعرف تكامل لبيغ لهذه الدالة البسيطة بالشكل

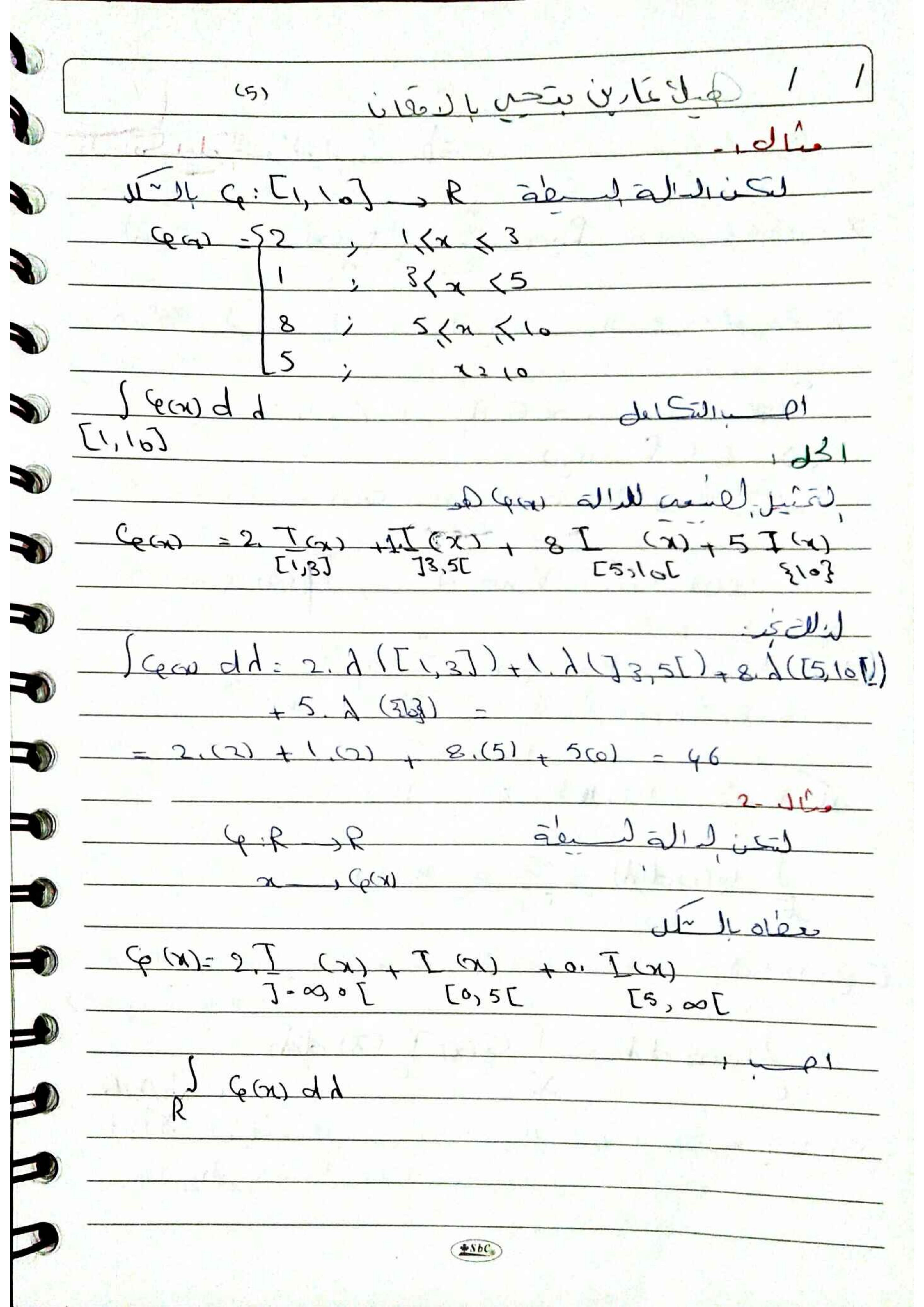
$$\int_X \varphi(x)\, d(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

واذا كانت E مجموعة جزئية من X ومقيسة فنعرف التكامل على E بالشكل الآتي:

$$\int_E \varphi(x)\, d\lambda = \int_X \varphi(x) I_E(x)\, d(\lambda)$$

ملاحظة:

اذا كان القياس μ مستمراً فلا داعي للشرط أن يكون $\varphi(x) = 0$ خارج مجموعة ذات قياس محدود.



(5) حل التمارين بتحيي بالاتقان

مثال ١-

لتكن الدالة البسيطة $\varphi : [1,10] \to \mathbb{R}$ بالشكل

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 & ; \ 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & ; \ 3 < x < 5 \\ 8 & ; \ 5 \leq x < 10 \\ 5 & ; \ x = 10 \end{cases}$$

احسب التكامل $\int_{[1,10]} \varphi(x)\, d\lambda$

الحل:

التمثيل القياسي للدالة $\varphi(x)$ هو

$$\varphi(x) = 2 \cdot I_{[1,3]}(x) + 1 \cdot I_{]3,5[}(x) + 8\, I_{[5,10[}(x) + 5\, I_{\{10\}}(x)$$

لذلك نجد

$$\int \varphi(x)\, d\lambda = 2 \cdot \lambda([1,3]) + 1 \cdot \lambda(]3,5[) + 8 \cdot \lambda([5,10[) + 5 \cdot \lambda(\{10\}) =$$

$$= 2 \cdot (2) + 1 \cdot (2) + 8 \cdot (5) + 5(0) = 46$$

مثال ٢-

لتكن الدالة البسيطة $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \varphi(x)$

معطاة بالشكل

$$\varphi(x) = 2 \cdot I_{]-\infty,0[}(x) + I_{[0,5[}(x) + 0 \cdot I_{[5,\infty[}(x)$$

احسب:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\lambda$$

الحل:

$$\int_R \varphi(x)\, d(\lambda) = 2.\lambda(]-\infty,0[) + 1.\lambda([0,5]) + 0.\lambda(]5,\infty[)$$

$$= 2.\infty + 5(1) + 0 = \infty$$

هنا نجد أن الدالة $\varphi(x)$ غير محولة على R لأنه الدالة $\varphi(x) \neq 0$ على مجموعة قياسها ∞ (لأن قياس ليبغ غير منتهي)

* خواص التكامل ليبغ للدوال البسيطة:

① إذا كانت $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$

و

$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}(x)$

تمثيلان مختلفان للدالة $\varphi(x)$ فيكون:

$$\int_X \varphi(x)\, d(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda(B_j)$$

هذا يعني أن قيمة التكامل مستقل عن طريقة تمثيل الدالة $\varphi(x)$

② إذا كانت $E_1, E_2, \dots, E_n$ مجموعات مقيسة ومنفصلة مثنى مثنى بحيث

$\mu(E_i) < \infty \; ; \; i = 1, 2, \dots, n$

وفرضنا $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ فيكون عندئذ

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^{n} a_i I_{E_i}\right) d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

③ نلاحظ أن الدالة المميزة هي حالة خاصة من الدوال البسيطة فيكون

$$\int_E I_A(x)\, d\mu = \mu(A)$$

④ اذا كانت φ, ψ دوال بسيطة فإن:

(أ) $\int_E c\varphi(x)\,d\mu = c\int_E \varphi(x)\,d\mu$

حيث c ثابت

(ب)

$$\int_E [\varphi(x) + \psi(x)]\,d\mu = \int_E \varphi(x)\,d\mu + \int_E \psi(x)\,d\mu$$

(ج) اذا كان $\varphi \leq \psi$ a.e فإن $\int_E \varphi(x)\,d\mu \leq \int_E \psi(x)\,d\mu$

⑤ اذا كانت E مجموعة مقيسة فيكون $\int_E d\mu = \mu(E)$

* اعتماداً على تعريف الدوال البسيطة نعرف تكامل الدوال المقيسة المحدودة

* تكامل ليبيغ للدوال المقيسة المحدودة

نفرض ان (X, F, μ) فضاء قياس منتهي القياس

اي ان $\mu(X) < \infty$

ونفرض ان الدالة $f: X \to R$ مقيسة ومحدودة

هذا يعني ان المجموعة $E(f > c)$ مقيسة لكل عدد حقيقي c

كما ان:

$$|f(x)| < \infty \quad , \quad \forall x \in X$$

تعريف: (1) يسمى المقدار:

$$(L)\overline{\int_X} f(x)\,d\mu = \inf\left\{\int_X \varphi(x)\,d\mu : \varphi(x) \text{ دالة بسيطة } , \varphi \geq f\right\}$$

تكامل ليبيغ الأعلى لـ f على المجموعة X

(L) ← تكامل ليبيغ

(ج) يسمى المقدار

$(\underline{L})\int_X f(x)\,d\mu = \sup\{\int_X \varphi(x)\,d\mu : \varphi(x)$ دالة بسيطة $, \varphi \leq f\}$

تكامل ليبيغ الأدنى للدالة f على المجموعة X

تكامل أدنى

(٣) نقول ان الدالة f قابلة للتكامل حسب ليبيغ على المجموعة X اذا كانت

$$(\overline{L})\int_X f(x)\,d\mu = (\underline{L})\int_X f(x)\,d\mu$$

وهذه القيمة تسمى تكامل ليبيغ للدالة f على المجموعة X عن القياس μ ونرمز لها

$$\int_X f\,d\mu \quad \text{أو اختصاراً} \quad (L)\int_X f(x)\,d\mu$$

ملاحظة 1

اذا كانت الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ بسيطة فيكون

$$(\underline{L})\int_X f\,d\mu = (\overline{L})\int f\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

ملاحظة 2

اذا كانت الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ محدودة وكانت $\mu(X) < \infty$ عندئذ تكون الدالة f قابلة للتكامل على X اذا وفقط اذا كانت قيوسة.

مثال 1

لتكن $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ دالة ديرخلية

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

هل φ قابلة حسب ليبيغ على المجموعة $E = [0,1]$ ؟

الحل:

لدينا $|\varphi(x)| \leq 2 , \forall x \in [0,1]$

∴ الدالة $\varphi(x)$ محدودة ، القيوسة لأنه:

$$E(\varphi > c) = \begin{cases} [0,1] & ; c < 0 \\ [0,1] \cap Q & ; 0 \leq c < 1 \\ \phi & ; c \geq 1 \end{cases}$$

، المجموعات في الطرف قيوسة حسب لبيغ لذلك تكون الدالة $\varphi(x)$ مكاملة حسب الطريقة السابقة

، التكامل هو: $\int_{[0,1]} \varphi(x)\, d\lambda = \int_{[0,1]\cap Q} \varphi(x)\, d\lambda + \int_{[0,1]\setminus Q} \varphi(x)\, d\lambda$

$$= \underbrace{\int_{[0,1]\cap Q} 1 \cdot d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{[0,1]\setminus Q} 0\, d\lambda}_{=0}$$

لأن $\lambda([0,1]\cap Q) = 0$

∴ $\int_{[0,1]} \varphi(x)\, d\lambda = 0$ علماً أن الدالة $\varphi(x)$ غير مكاملة حسب ريمان

خواص التكامل لبيغ للدوال القيوسة والمحدودة:

① لتكن $f, g : X \to R$ دوال قيوسة ومحدودة على X كما أن $\mu(X) < \infty$ عندئذ:

$$\int_X c\, f(x)\, d\mu = c \int_X f(x)\, d\mu$$

a.e تقريباً في كل مكان

(10)

$$\int_X [f(x)+g(x)]\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu + \int_X g(x)\,d\mu$$

③ اذا كان $f \overset{a.e}{=} g$ فان $\int_X f(x)\,d\mu = \int_X g(x)\,d\mu$

④ 〃 〃 $f \overset{a.e}{\leq} g$ فان $\int_X f(x)\,d\mu \leq \int_X g(x)\,d\mu$

④ يكون دوما

$$\left|\int_X f(x)\,d\mu\right| \leq \int_X |f(x)|\,d\mu$$

⑤ اذا كان $c_1 \leq f(x) \leq c_2$ فيكون

$$c_1\,\mu(X) \leq \int_X f(x)\,d\mu \leq c_2\,\mu(X)$$

⑥ اذا كان $X = \sum^n E_i$ فيكون

$$\int_X f(x)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\,d\mu$$

⑦ اذا كان $f \overset{a.e}{=} 0$ فان $\int_X f(x)\,d\mu = 0$

⑧ 〃 〃 $f \overset{a.e}{\geq} 0$ 〃 $\int_X f(x)\,d\mu \geq 0$

⑨ 〃 〃 $f \overset{a.e}{\geq} 0$ وكان $\int_X f(x)\,d\mu = 0$ فان $f \overset{a.e}{=} 0$

مثال:

أثبت أن دالة ديرخلية مجمولة حسب ليبيغ في المجال $[0,1]$ واحسب التكامل.

الحل:

بما ان دالة ديرخلية $\varphi \overset{a.e}{=} 0$ على $[0,1]$

فيكون $\int_{[0,1]} \varphi(x)\,d\mu = 0$ حسب ⑦

(11) إذا كانت $\mu(E)=0$ فإن $\int_E f(x)\,d\mu = 0$

انتهت المحاضرة الأولى.

الأربعاء 16 / 5 / 2018 المحاضرة 17 -

تكامل ليبيغ للدالة البسيطة:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$$

هو:

$$\int_X \varphi(x)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة الغير سالبة المحدودة

ملاحظة:

الدالة المحدودة $f(x)$ تكون قابلة للقياس إذا وفقط إذا كانت قابلة للقياس (شرط $\mu(X)<\infty$)

مثال:

دالة ديرخليه غير سالبة ومحدودة قابلة للتكامل حسب ليبيغ (لكنها غير قابلة للتكامل حسب ريمان)

ذكرنا الخواص:

مبرهنة:

إذا كانت الدالة $f:[a,b] \longrightarrow R$ قابلة للتكامل حسب ريمان فتكون قابلة للتكامل حسب ليبيغ والتكاملان متساويان

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu = (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

ملاحظة:

إن عكس المبرهنة غير صحيح في الحالة العامة حيث إن الدالة دالة ديرخليه قابلة للتكامل حسب ليبيغ وغير قابلة للتكامل حسب ريمان.